CARLO FELICE MANARA

Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE
EDITRICE IN MODENA — 1951

CARLO FELICE MANARA

Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE
EDITRICE IN MODENA — 1951

Atti del Seminario Matematico e Fisico dell' Università di Modena
Direttore: CATALDO AGOSTINELLI

Estratto dal Volume V — 1950-51

Società Tipografica Modenese - Editrice in Modena - 1951

§ I. — *Introduzione.*

La presente Nota è dedicata allo studio del comportamento delle trasformazioni analitiche regolari tra due piani π e π' nell'intorno di ordine qualunque di un punto O di π che sia semplice per la curva jacobiana, con particolare riguardo al caso cremoniano.

Precisamente si esprimono anzitutto in due modi diversi le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una trasformazione T sia approssimabile fino ad un ordine n prefissato da una trasformazione cremoniana, nell'intorno di un punto O cosiffatto (§ II). In particolare poi si caratterizzano le trasformazioni che sono approssimabili cremonianamente fino ad un ordine qualunque (§ III). Infine si studia il comportamento di una trasformazione che sia approssimabile cremonianamente fino ad un ordine n e non oltre, dimostrando in particolare che essa è approssimabile fino ad un ordine $n + m$ comunque grande da una trasformazione razionale di indici $(1, n + 1)$ (§§ IV e V).

Tra gli Autori che si sono occupati dell'argomento ricordiamo in modo particolare E. BOMPIANI [1] che ha iniziato lo studio delle corrispondenze tra due piani π e π' nell'intorno dei punti della jacobiana (appartenente a π) dal punto di vista della Geometria proiettiva differenziale e M. VILLA [2] che ha assegnato le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una trasformazione, nell'intorno di un tale punto, sia approssimabile cremonianamente fino all'ordine 2.

---

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi; esame delle jacobiane*, «Atti Acc. d'Italia», Vol. 14°, Fasc. 2.

(2) Cfr. M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo nel caso cremoniano*, «Rend. Lincei», (8) Vol. 2°, (1947).

M. VILLA e G. VAONA, *Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali tra due piani o spazii*, «Boll. UMI», Serie III, Anno V, (1950).

Qui ci varremo sostanzialmente del teorema in base al quale ogni trasformazione puntuale regolare tra due piani π e π', nell'intorno di una coppia di punti corrispondenti O ed O' che sia una coppia di regolarità, è approssimabile cremonianamente fino ad un ordine n qualunque prefissato [3].

Ora poichè questo teorema ha validità anche per le trasformazioni che intercedono fra i due spazii S_r ed S_r' aventi un numero qualunque r di dimensioni [4], avvertiamo che sarebbe facile dare di molti risultati qui conseguiti una formulazione che sia valida per tali spazii. Tuttavia, rimettendo ad altra occasione la generalizzazione in questo senso dei risultati presenti, abbiamo preferito approfondire lo studio del caso piano, affinchè il superamento delle sostanziali difficoltà che qui si presentano possa servire per effettivi progressi nelle ricerche sullo stesso argomento o su argomenti analoghi.

§ II. — *Condizioni di approssimabilità cremoniana fino ad un dato ordine.*

Sia dunque T una trasformazione analitica tra due piani: π riferito a coordinate cartesiane x, y e π' riferito a coordinate cartesiane x', y'. Scelte le origini O ed O' delle coordinate nei due piani in due punti corrispondenti, poniamo che le coordinate di un punto P' dell'intorno di O' siano funzioni regolari di quelle di P nell'intorno di O. Allora le espressioni di T daranno x', y' mediante serie di potenze intere e positive delle variabili x, y convergenti in un opportuno intorno dei valori $x = y = 0$, e pertanto avranno la forma

$$T \equiv \begin{cases} x' = \sum a_{ik}\, x^i\, y^k \\ y' = \sum b_{ik}\, x^i\, y^k \end{cases} \qquad i + k > 0$$

In tutta la presente trattazione supporremo che O sia un punto semplice della curva jacobiana di T, cioè della curva J che si

---

[3] Cfr. B. Segre, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, «Annali di Matem.», Serie IV, vol. 28°.

C. F. Manara, *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane*, «Rend. Lincei», Serie VII, volume 8°.

[4] Cfr. C. F. Manara, *loc. cit.* in [3].

rappresenta uguagliando a zero il determinante jacobiano delle funzioni x' ed y' rispetto alle variabili x, y

$$J \equiv \left\{ \frac{d(x', y')}{d(x, y)} = 0 \right\}$$

determinante che supporremo non identicamente nullo, come avviene se T è genericamente invertibile.

Allora è noto ([5]) che con scelta opportuna dei riferimenti nei piani π e π' le equazioni della T possono essere poste nella forma

$$T \equiv \begin{cases} x' = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3] \\ y' = \phantom{x +{}} b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + [3] \end{cases}$$

dove, come al solito, qui e nel seguito conveniamo di indicare col simbolo $[n]$ una serie di potenze intere e positive i cui termini hanno grado (complessivo) non minore di n.

Operiamo ora nel piano π la trasformazione regolare e biunivocamente invertibile nell'intorno dei valori $x = y = 0$

$$R_1 \equiv \begin{cases} x_1 = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3] \\ y_1 = y \end{cases}$$

Allora la T si presenta come prodotto della R_1 e di una trasformazione T_1 avente la forma analitica

$$T_1 \equiv \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = \phantom{x_1 +{}} c_{20}x_1^2 + c_{11}x_1y_1 + c_{02}y_1^2 + [3] \end{cases} \tag{1}$$

Le note proprietà elementari dei determinanti jacobiani assicurano che O rimane punto semplice per la jacobiana della trasformazione T_1 data dalla (1), jacobiana che, nelle variabili x_1, y_1, è rappresentata dall'equazione molto semplice

$$J \equiv \left\{ \frac{\partial y'}{\partial y_1} = 0 \right\}$$

Ci dispenseremo in seguito dal ripetere le ovvie e fondamentali osservazioni analoghe a questa ogni volta che ci capiterà di operare sul piano π delle trasformazioni regolari e biunivocamente invertibili nell'intorno di O, trasformazioni che diremo brevemente regolari e biunivoche in O.

([5]) Cfr. M. Villa e G. Vaona nel secondo dei lavori citati in ([2]).

Sussiste ora il

LEMMA I. — La T è approssimabile cremonianamente fino all'ordine n quando la T_1 è esprimibile come prodotto di una trasformazione regolare e biunivoca R_2

$$R_2 \equiv \begin{cases} x_2 = x_2(x_1, y_1) \\ y_2 = y_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

e di una trasformazione U_2 avente la forma canonica

$$U_2 \equiv \begin{cases} x' = x_2 \\ y' = x_2\, y_2 + [n+1] \end{cases}$$

Ed infatti la trasformazione R data dal prodotto delle due regolari e biunivoche R_1 ed R_2

$$R = R_1 \cdot R_2$$

è ancora regolare e biunivoca e pertanto è approssimabile fino all'ordine n da una trasformazione cremoniana H. Si dica ora K la trasformazione cremoniana

$$K \equiv \begin{cases} x' = x_2 \\ y' = x_2\, y_2 \end{cases}$$

È allora chiaro che la trasformazione cremoniana data dal prodotto $H \cdot K$ approssima la T fino all'ordine n.

Supponiamo ora che nella espressione analitica della T_1 data dalle (1) si abbia

$$c_{0i} = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \leq n$$

Allora la T_1 acquista la forma particolare U_1 data da

$$U_1 \equiv \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = x_1 \cdot B(x_1, y_1) + y_1^{n+1}\, Q(y_1) \end{cases}$$

dove Q è una funzione regolare di y_1 e B una funzione pure regolare delle variabili x_1, y_1 che soddisfa alla condizione fondamentale

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y_1}\right)_{x_1 = y_1 = 0} \neq 0$$

necessaria perchè la curva jacobiana della trasformazione abbia in O un punto semplice, come abbiamo espressamente supposto. Questa condizione assicura che la trasformazione τ definita dalle formule seguenti

$$\tau \equiv \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = B(x_1, y_1) \end{cases}$$

è regolare e biunivoca insieme con la sua inversa

$$\tau^{-1} \equiv \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = \sigma(x_2, y_2) \end{cases}$$

Pertanto T si presenta come prodotto della R_1 τ e della trasformazione

$$\begin{cases} x' = x_2 \\ y' = x_2 y_2 + \Theta(x_2, y_2)[\sigma(x_2, y_2)]^{n+1} = x_2 y_1 + [n+1] \end{cases}$$

dove Θ è una funzione delle due variabili x_2, y_2 regolare per $x_2 = y_2 = 0$. Quindi la trasformazione τ sopra definita moltiplicata per una trasformazione avente la forma canonica U_2 dà la T; possiamo pertanto enunciare il

LEMMA II. — La T è approssimabile cremonianamente fino all'ordine n se nella espressione analitica della trasformazione T_1 sono verificate le condizioni

$$c_{0i} = 0 \quad \text{per} \quad i \leq n$$

Invero abbiamo visto che la T può essere espressa come prodotto di una trasformazione regolare e biunivoca e di una seconda avente la forma canonica U_2, ed allora la conclusione segue in forza del Lemma I.

Assumiamo ora nel piano π' come infinitesimo principale la distanza dall'origine di un punto che corrisponde ad un punto *generico* di π il quale sta nell'intorno di primo ordine di O, e sia E_n un elemento lineare di curva in π per O.

Possiamo dire brevemente che «la T fa corrispondere ad E_n il punto O' (o trasforma E_n nel punto O')» se a tutti i punti P di E_n essa fa corrispondere dei punti P' la cui distanza da O' è infinitesima di ordine $n+1$ almeno.

È facile verificare che la proprietà così definita per la T è invariante di fronte alle trasformazioni regolari e biunivoche a cui si pensino sottoposti i piani π e π'.

Sussiste ora il

TEOREMA I. — Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale tra due piani π e π' in un punto O di π semplice per la jacobiana sia approssimabile fino all'ordine n mediante una trasformazione cremoniana, è che esista in π un elemento lineare E_n avente origine in O che da T sia trasformato in O'.

Dimostriamo che la condizione è necessaria: supponiamo pertanto che T sia approssimabile in O fino all'ordine n da una trasformazione cremoniana

$$T_0 \equiv \begin{cases} x' = \varphi_1(x, y)/\varphi_0(x, y) \\ y' = \varphi_2(x, y)/\varphi_0(x, y) \end{cases}$$

Ora, come è noto, i punti in cui la T_0 non è regolare e quindi univocamente invertibile, sono soltanto quelli che appartengono alla curva Λ jacobiana della rete omaloidica di curve algebriche

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0 \tag{2}$$

Dalle nostre ipotesi segue che O sia un punto semplice della curva Λ, diverso quindi dai punti base dalla rete; ma è pur noto che la jacobiana Λ della rete omaloidica (2) è formata da curve fondamentali per la rete stessa, cioè da curve tali che punti diversi di ognuna di esse non impongano condizioni diverse alle curve della rete e quindi non corrispondano a punti diversi in π'.

Di conseguenza l'E_n di tale jacobiana per O è tale che ogni suo punto ammette O' come corrispondente.

Viceversa se esiste un E_n cosiffatto, esso è necessariamente quello comune a tutti i rami rappresentati, nelle variabili $x_1\, y_1$, da espressioni del tipo

$$x_1 = y_1^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \cdot y_1^i \tag{3}$$

e pertanto nella espressione di T_1 deve essere

$$c_{0i} = 0$$

per ogni $i \leq n$. Allora la conclusione segue immediatamente in forza dei lemmi premessi.

Accanto al teorema ora dimostrato ne sussiste un secondo il quale fornisce una caratterizzazione della approssimabilità cremoniana fino all'ordine n che è estensione di quella data da M. Villa e G. Vaona ([6]) per $n = 2$. Sussiste invero il

TEOREMA II. — Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale T (tra due piani π e π') nell'intorno di un punto O di π semplice per la jacobiana sia approssimabile cremonianamente fino all'ordine n (≥ 2) è che la T^{-1} faccia corri-

---

([6]) Cfr. il secondo dei lavori citati in ([4]).

spondere alle rette per O' (trasformato di O) delle curve aventi in comune (almeno) uno stesso E_n di centro O.

Dimostriamo che la condizione è necessaria; invero se T è cremonianamente approssimabile fino all'ordine n per il teorema precedente esiste un E_n per O che la T muta in O'; tale E_n risulta essere necessariamente quello comune a tutte le curve (3). Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Lemma II e la T risulta esprimibile come prodotto di una trasformazione regolare e biunivoca e di una seconda avente la forma canonica U_2; sulla quale il teorema è immediatamente verificabile.

Per dimostrare che la condizione è sufficiente, osserviamo che tutte le rette di π' per O' aventi equazioni

$$x' = \lambda\, y'$$

hanno per corrispondenti in π le curve

$$x_1 = \lambda\,(c_{20}\, x_1^2 + c_{11}\, x_1\, y_1 + c_{02}\, y_1^2 + \ldots) \tag{4}$$

Ora, perchè tutte le curve (4) abbiano, al variare di λ, lo stesso E_n in comune in O è necessario che si abbia

$$c_{0i} = 0 \quad \text{per} \quad i \leq n$$

Invero se fosse $c_{0k} \neq 0$ per $k < n$ l'E_n (rettilineo) definito da $\lambda = 0$ sarebbe chiaramente diverso da quello definito da un qualunque λ non nullo.

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Lemma II.

Da quanto precede, una verifica analitica immediata prova la validità del seguente

COROLLARIO. — L'E_{n-1} appartenente all'E_n di cui è questione negli enunciati dei due teoremi precedenti, appartiene alla jacobiana di T.

Pure da quanto precede si deduce la validità della seguente

OSSERVAZIONE. — Data una trasformazione T fra due piani π e π' di cui si voglia determinare la approssimabilità cremoniana nell'intorno di un punto O semplice per la jacobiana, il Teorema II ora dimostrato fornisce ovviamente il mezzo per dirimere se la T sia illimitatamente approssimabile oppure no. Ed in questo secondo caso fornisce il mezzo per riconoscere quale sia l'ordine massimo di approssimabilità.

§ III. — *Condizioni di illimitata approssimabilità cremoniana.*

Caratterizzata così, in due modi diversi, la approssimabilità cremoniana di una trasformazione T nell'intorno di O fino ad un dato ordine n, rimangono da esaminarsi i due casi che si possono presentare in relazione a tutti i valori ammissibili per n:

1°) il caso in cui T sia illimitatamente approssimabile;

2°) il caso in cui esista un massimo ordine dell'intorno di O in cui la T è cremonianamente approssimabile.

Dedicheremo i prossimi paragrafi IV e V allo studio di questo secondo caso, mentre il presente paragrafo III sarà dedicato alla caratterizzazione del 1° caso.

Tale caratterizzazione è fornita dal seguente

TEOREMA III. — Tutte e sole le trasformazioni puntuali T fra due piani π e π' le quali in un punto O di π semplice per la jacobiana sono approssimabili cremonianamente fino ad un ordine comunque alto ν sono esprimibili analiticamente nella forma

$$T_c \equiv \begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = X(x, y) \cdot Y(x, y) \end{cases}$$

dove le funzioni X ed Y sono regolari e nulle in O e tali che ivi non è nullo lo jacobiano

$$\frac{d\,(X, Y)}{d\,(x, y)}$$

Per dimostrare che tutte le trasformazioni T_c sono approssimabili cremonianamente fino ad un ordine ν comunque grande, si osservi che nelle ipotesi poste le equazioni

$$\begin{cases} X = X(x, y) \\ Y = Y(x, y) \end{cases}$$

definiscono una trasformazione regolare e biunivoca tra le coppie di valori x, y ed X, Y. Tale trasformazione è pertanto approssimabile mediante una trasformazione cremoniana K fino all'ordine ν. Detta ora T_k la trasformazione cremoniana

$$T_k \equiv \begin{cases} x' = X \\ y' = X \cdot Y \end{cases}$$

è chiaro che il prodotto $K\,T_k$ approssima T_c fino all'ordine ν.

E viceversa se T è approssimabile cremonianamente per qualunque ordine, devono valere per n qualunque le ipotesi dei teoremi I e II e pertanto nella espressione analitica della trasformazione T_1 devono essere nulli tutti i coefficienti c_{0i}. Quindi la T_1 assume l'aspetto

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ y' = x_1 \cdot B(x_1, y_1) \end{cases}$$

dove B è una funzione regolare che soddisfa alla condizione

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y_1}\right)_{x_1 = y_1 = 0} \neq 0$$

Pertanto T è riducibile alla forma T_c ponendo

$$X = x_1; \quad Y = B(x_1, y_1)$$

OSSERVAZIONE. — Dagli sviluppi del presente paragrafo risulta facile convincersi che il precedente teorema può essere formulato anche come segue:

Tutte e sole le trasformazioni puntuali tra due piani π e π' le quali in un punto O di π semplice per la jacobiana sono approssimabili cremonianamente fino ad un ordine ν comunque alto sono quelle date dal prodotto di una trasformazione regolare e biunivoca in O e di una trasformazione cremoniana non regolare in O.

§ IV. — *Gruppo di monodromia della T^{-1} quando la T ammette solo limitata approssimabilità cremoniana.*

Supponiamo ora che esista un massimo ordine dell'intorno di O nel quale la T sia approssimabile cremonianamente; e sia n tale ordine. Ciò implica che nella trasformazione U_2

$$U_2 \equiv \begin{cases} x' = x_2 \\ y' = x_2\, y_2 + \gamma_0\, y_2^{n+1} + \ldots \end{cases}$$

si abbia γ_0 essenzialmente diverso da zero. Supporremo di aver scelto nel piano π le unità di misura (come è sempre possibile fare) in modo che si abbia $\gamma_0 = 1$.

La trasformazione inversa T^{-1} fa chiaramente corrispondere ad un punto P' dell'intorno di O' certi $n + 1$ punti $P_1 \ldots P_{n+1}$ dell'intorno di O. Sorge allora immediatamente la questione di determinare il comportamento di tali punti al variare di P' nel piano (complesso) π'.

A tal fine costruiremo una opportuna trasformazione algebrica la quale approssimi la T data fino ad un ordine $n+m$ (con $m>0$) comunque grande.

Pertanto riprendiamo la trasformazione U_2 e riscriviamola mettendo in evidenza i termini che contengono la sola variabile y_2 come segue

$$U_2 \equiv \begin{cases} x' = x_2 \\ y' = x_2\,[y_2 + A_n(x_2, y_2)] + y_2^{n+1} D_0(y_2) + [n+m+1] \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con D_0 un polinomio di grado $m-1$ in y_2 e con $A_n(x_2, y_2)$ un complesso di termini nelle due variabili x_2, y_2 che hanno grado non minore di n.

Operiamo ora la trasformazione regolare e biunivoca

$$S_3 \equiv \begin{cases} x_3 = x_2 \\ y_3 = y_2 + A_n(x_2, y_2) \end{cases}$$

ed osserviamo che anche la trasformazione inversa S_3^{-1} è chiaramente della forma

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 + A'_n(x_3, y_3) \end{cases}$$

dove il simbolo $A'_n(x_3, y_3)$ ha significato analogo ad A_n.

Pertanto la T risulta prodotto della trasformazione regolare e biunivoca $R\,S_3$ e della

$$U_3 \equiv \begin{cases} x' = x_3 \\ y' = x_3\,[y_3 + A_{2n-1}(x_3, y_3)] + y_3^{n+1} D_1(y_3) + [n+m+1] \end{cases}$$

Consideriamo ora la successione delle trasformazioni regolari e biunivoche

$$S_{i+2} \equiv \begin{cases} x_{i+2} = x_{i+1} \\ y_{i+2} = y_{i+1} + A_{n+(i-1)(n-1)}(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

è allora chiaro che il prodotto

$$\Sigma_r = S_3 \cdot S_4 \ldots S_{r+2}$$

è ancora una trasformazione regolare e biunivoca e che la T risulta dal prodotto $R \cdot \Sigma_r$ e della

$$U_{r+2} \equiv \begin{cases} x' = x_{r+2} \\ y' = x_{r+2}\,[y_{r+2} + A_{n+r(n-1)}(x_{r+2}, y_{r+2})] + y_{r+2}^{n+1} D_r(y_{r+2}) + \\ \qquad + [n+m+1] \end{cases}$$

e pertanto è sufficiente assumere l'intero r soddisfacente alla limitazione

$$r \geq \frac{m+1}{n-1}$$

perchè si abbia semplicemente

$$U_{r+2} \equiv \begin{cases} x' = x_{r+2} \\ y' = x_{r+2}y_{r+2} + y_{r+2}^{n+1} + \gamma_1 y_{r+2}^{n+2} + \ldots + \gamma_{m-1} y_{r+2}^{n+m} + [n+m+1] \end{cases}$$

Diciamo ora M_0 la trasformazione cremoniana che approssima la trasformazione regolare e biunivoca $R \cdot \sum_r$ fino all'ordine $n+m$. Posto per semplicità $x_{r+2} = \xi$; $y_{r+2} = \eta$ avremo che T è approssimata fino all'ordine $n+m$ dal prodotto della M_0 e della trasformazione algebrica

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} x' = \xi \\ y' = \xi\eta + \eta^{n+1} + \gamma_1 \eta^{n+2} + \ldots + \gamma_{m-1} \eta^{n+m} \end{cases}$$

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA IV. — Se nell'intorno di un punto O, semplice per la jacobiana, la trasformazione T è cremonianamente approssimabile soltanto fino all'ordine n, essa è illimitatamente approssimabile con una trasformazione algebrica, la cui inversa fa corrispondere ad un punto P' dell'intorno del punto O' (corrispondente pi O) $n+1$ punti $P_1 \ldots P_{n+1}$ dell'intorno di O.

Consideriamo ora la trasformazione T^{-1} in un intorno convenientemente limitato $\mathcal{T}$ di O' sul piano complesso π' (cioè sull'ente quadridimensionale rappresentativo del piano complesso π') e la curva trasformata della jacobiana di T mediante la T stessa, curva che risulta essere la curva di diramazione della T^{-1}.

In relazione alla T ed in $\mathcal{T}$ si hanno: un sistema fondamentale Γ di cammini chiusi circondanti la curva di diramazione; un gruppo G generato dalle sostituzioni che si operano sui punti $P_1, \ldots, P_{n+1}$ quando P' percorre i cammini del sistema Γ.

Similmente consideriamo la funzione algebrica $\eta(x', y')$ definita dalla equazione

$$F(x', y', \eta) = -y' + x'\eta + \eta^{n+1} + \ldots + \gamma_{m-1}\eta^{n+m} = 0$$

Avremo analogamente un sistema di cammini Γ^* circondanti la curva di diramazione di η ed un gruppo G^* generato dalle sostituzioni che si operano per i cammini di Γ^* tra quelle $n+1$ determinazioni della η che tendono a zero quando x' ed y' tendono pure a zero.

È chiaro che, data la illimitata approssimabilità della T, i singoli cammini Γ e Γ^* possono assumersi coincidenti e i due gruppi G e G^* risultano avere la stessa struttura.

Ora la curva di diramazione della T si rappresenta facilmente quando si osservi che l'equazione della jacobiana è data da

$$J \equiv \left\{ \frac{\partial y'}{\partial \eta} = x' + (n+1)\, \eta^n + \ldots = 0 \right\}$$

e di qui e dalle equazioni (5) si ha la rappresentazione che si cerca. Tale curva di diramazione per $n = 2$ possiede una cuspide ordinaria e per $n > 2$ un ramo superlineare ordinario di ordine n (e classe uno) essendo la sua rappresentazione parametrica in questo caso data dalle formule

$$\begin{cases} x' = -\,(n+1)\, \eta^n + \ldots \\ y' = -\, n\, \eta^{n+1} + \ldots \end{cases}$$

È ora facile vedere che la funzione algebrica $\eta\,(x', y')$ rientra in una classe di funzioni il cui comportamento è stato completamente determinato ([7]); infatti la equazione $F = O$ nello spazio in cui x', y' ed η sono coordinate cartesiane di punto rappresenta una superficie algebrica avente nell'origine un punto semplice ed un contatto $(n+1)$-punto con l'asse delle η. In conseguenza di noti risultati quindi il gruppo di permutazioni in esame è il gruppo totale, in quanto contiene (almeno) tutti gli scambi che legano una determinazione a tutte le altre.

Possiamo pertanto enunciare il

TEOREMA V. — Se la T è approssimabile cremonianamente nell'intorno di O soltanto fino all'ordine n, il gruppo di monodromia della T^{-1} nell'intorno di O' è il gruppo totale.

§ V. — *Determinazione di una trasformazione approssimante razionale di indici minimi.*

Se ora ci si domanda di approssimare nel caso in esame la trasformazione T fino ad un ordine $n + m$ comunque grande con

---

([7]) Cfr. C. F. MANARA, *La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una singolarità ordinaria della sua curva di diramazione,* « Rend. Ist. Lombardo », Vol. 78.

una trasformazione algebrica è chiaro che i valori minimi degli indici di questa devono essere 1 ed $n+1$.

Si presenta quindi il problema di determinare la più semplice trasformazione algebrica cosiffatta e di costruirla effettivamente; entrambi i problemi verranno qui risolti, e precisamente con la costruzione di una trasformazione razionale $(1, n+1)$, risultato che costituisce la più ovvia generalizzazione del teorema più volte citato secondo il quale una trasformazione regolare e biunivoca è approssimabile fino ad un ordine prefissato da una trasformazione cremoniana, cioè $(1, 1)$.

Ora abbiamo visto nel precedente paragrafo che nelle ipotesi poste la trasformazione T può essere approssimata fino all'ordine $n+m$ comunque alto dal prodotto di una trasformazione cremoniana M_0 e della trasformazione

$$V \equiv \begin{cases} x' = \xi \\ y' = \xi\,\eta + \eta^{n+1} + \gamma_1\,\eta^{n+2} + \ldots \gamma_{m-1}\,\eta^{n+m} \end{cases}$$

Pertanto il nostro problema sarà risolto se riusciremo ad approssimare la V fino all'ordine $n+m$ col prodotto di una trasformazione regolare Z e di una trasformazione razionale V_ρ di indici $(1, n+1)$. Invero, detta Z_0 la trasformazione cremoniana che approssima Z fino all'ordine $n+m$, la T sarà approssimata fino allo stesso ordine dal prodotto $M_0 \cdot Z_0\, V_\rho$.

Fissiamo quindi una trasformazione regolare e biunivoca

$$W_1 \equiv \begin{cases} \xi_1 = \xi \\ \eta_1 = \eta \cdot \left\{ 1 + \gamma_1\,\eta + \ldots \gamma_{m-1}\,\eta^{m-1} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \end{cases}$$

la cui inversa è pure regolare e biunivoca, del tipo

$$W_1^{-1} \equiv \begin{cases} \xi = \xi_1 \\ \eta = \eta_1 + \delta_1\,\eta_1^2 + \delta_2\,\eta_1^3 + \ldots \end{cases}$$

Si verifica che la V può essere scritta come prodotto della W_1 e della trasformazione seguente

$$V_1 \equiv \begin{cases} x' = \xi_1 \\ y' = \alpha_{11}\,\eta_1 + \alpha_{21}\,\eta_1^2 + \ldots + \eta_1^{n+1} \left\{ 1 + \xi_1\,\Psi_1\,(\eta_1) \right\} \end{cases}$$

dove $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}$ sono funzioni regolari di ξ_1 nulle per $\xi_1 = 0$ e Ψ_1 è pure una funzione regolare di η_1.

È ora possibile fissare la successione di trasformazioni regolari e biunivoche

$$W_i \equiv \begin{cases} \xi_i = \xi_{i-1} \\ \eta_i = \eta_{i-1} \left\{ 1 + \xi_{i-1}^{i-1}\,\Psi_{i-1}\,(\eta_{i-1}) \right\}^{\frac{1}{n+1}} \end{cases}$$

e sia Z il prodotto

$$Z = W_1 \, W_2 \dots W_s$$

che ancora è una trasformazione regolare e biunivoca.

Ora si vede che la V può scriversi come prodotto della Z e della trasformazione seguente

$$V_s \equiv \begin{cases} x' = \xi_s \\ y' = \alpha_{1s} \eta_s + \alpha_{2s} \eta_s^2 + \dots + \eta_s^{n+1} \left\{ 1 + \xi_s^s \Psi_s (\eta_s) \right\} \end{cases}$$

Pertanto basta assumere $s > m$ perchè si abbia

$$V_s \equiv \begin{cases} x' = \xi_s \\ y' = \alpha_{1s} \eta_s + \alpha_{2s} \eta_s^2 + \dots + \eta_s^{n+1} + [n + m + 1] \end{cases}$$

dove ancora le α_{is} sono funzioni regolari di ξ_s nulle per $\xi = O$.

Ora la trasformazione V_s è manifestamente approssimabile fino all'ordine $n + m$ dalla trasformazione razionale V_ρ data dalle

$$V_\rho \equiv \begin{cases} x' = \xi_s \\ y' = \beta_1 \eta_s + \beta_2 \eta_s^2 + \dots + \eta_s^{n+1} \end{cases} \tag{6}$$

essendo β_i il polinomio che si ottiene dalla α_{is} trascurando i termini di grado maggiore di $n + m - i$.

Possiamo pertanto concludere con il

TEOREMA VI. — Se la trasformazione T nell'intorno di un punto O semplice per la jacobiana è approssimabile cremonianamente fino all'ordine n e non oltre essa è approssimabile fino ad un ordine $n + m$ prefissato comunque grande da una trasformazione algebrica razionale $(1, n + 1)$.

OSSERVAZIONE. — La dimostrazione del precedente teorema è stata ottenuta per mezzo di una effettiva costruzione, con che, come abbiamo accennato, sono stati risolti contemporaneamente due problemi: quello di dimostrare la esistenza di una trasformazione algebrica razionale avente i minimi indici ed approssimante illimitatamente la T e quello di costruirla effettivamente.

Milano, Marzo 1951.